Relatività e Meccanica Quantistica: concetti e idee

Relativity and Quantum Mechanics: concepts and ideas

Approfondimenti #3

Relatività Speciale

Carlo Cosmelli

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera

Relatività Speciale: qualche calcolo e osservazione

- Come derivare le trasformazioni di Lorentz.
- La formula per la somma di velocità, qualche numero.
- Il paradosso dei Gemelli.
- L’esperimento da cui inferire che la massa aumenta con la velocità
- La soluzione al problema delle asimmetrie nei fenomeni elettromagnetici.
- La simmetria delle trasformazioni di Lorentz.

Nota formale: Come utilizzare l’assunzione c=costante, un esempio

Come descrivo un impulso di luce che viene emesso da una sorgente puntiforme in maniera isotropa (onda sferica)?

La sorgente sia nell’origine del sistema S(O,x,y,z), il fronte d’onda (**r**) viaggia con velocità **c**, quindi:

$\mathrm{r}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2$; $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2$ (1) ma la velocità c deve essere la stessa anche se la misuro da un sistema S’ in moto rispetto ad S, per esempio con velocità $\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{V}\,\hat{\mathrm{x}}$ rispetto a S $\rightarrow$ $\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2 + \mathrm{z}'^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}'^2$ (2)

Ora applichiamo le trasformazioni di Galileo: $\mathrm{x}' = \mathrm{x} - \mathrm{Vt}$; $\mathrm{y}' = \mathrm{y}$; $\mathrm{z}' = \mathrm{z}$; $\mathrm{t}' = \mathrm{t}$ (3) alla relazione (2), ho:

$\mathrm{x}^2 \mathbf{- 2Vxt + V^2t^2} + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2$……Non è uguale alla (1): le trasformazioni di Galileo non vanno bene!

Come trovare delle trasformazioni giuste?

- I termini in y’ e z’ vanno bene, il problema riguarda i termini in x’ e t’.
- La trasformazione **(3)** deve essere «lineare» in *x* e *t* perché voglio che la sfera si espanda a velocità costante….quindi relazioni come $x' = \alpha\, x^{1/2} t^{1/2}$ oppure x’= x sen αt ...non darebbero un moto uniforme.
- Devo cambiare anche t’= t…….per cancellare i termini $-2Vxt + V^2t^2$……

Nota formale: Come utilizzare l'assunzione c=costante 2

$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ (1) $\quad x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$ (2) $\quad$ Cerco una trasformazione che renda (1) = (2)

- La trasformazione deve essere «lineare» in *x* e *t* perché voglio che la sfera si espanda a velocità costante….
- Devo cambiare: t'= t…….per cancellare i termini $-2Vxt+V^2t^2$……devo inserire anche la x in t'

- Provo con: $\quad x' = x - Vt \;;\; y' = y \;;\; z' = z \;;\; t' = t + \mathbf{fx}$ $\quad$ (4), $\quad$ dove *f* è ignota; la devo trovare.

- Calcoliamo la (2), inserendovi le (4): $x^2 - 2xVt + V^2t^2 = c^2t^2 + 2c^2fxt + c^2f^2x^2$, i termini in xt si cancellano se

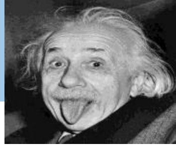
$f = -V/c^2$, quindi ponendo: $t' = t - Vx/c^2$, la (2) diventa quindi:

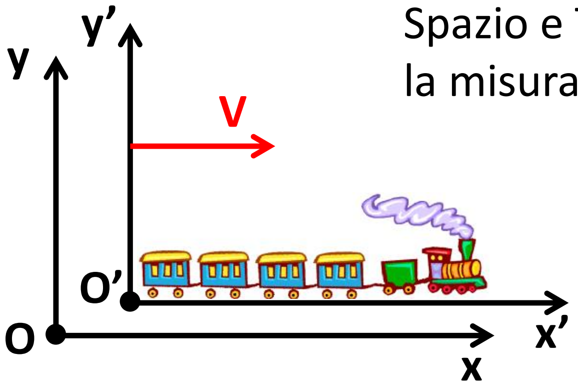
$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$ …che già va molto meglio, rispetto alla (1) c'è il fattore fra parentesi, che però è costante e lo stesso per la x e la t, quindi posso eliminarlo scrivendo:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \\[2ex] t' = \dfrac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Queste trasformazioni funzionano (sono le trasformazioni di Lorentz): con queste (1)=(2) e **c= costante**

Il risultato matematico: Le trasformazioni di Lorentz - γ





Spazio e Tempo non sono più assoluti e indipendenti,
la misura di uno dipende dalla misura dell'altro.

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') \\ y = y' \quad ; \quad z = z' \\ t = \gamma \cdot \left(t' + x' V/c^2\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq 1$$

$V = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 1$

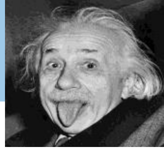
$V = c \quad \rightarrow \quad \gamma = \infty$

Nelle trasformazioni si trova il fattore γ: $1 \leq \gamma \leq \infty$

Il fattore γ ci dice quanto è grande l'effetto della relatività.
I sistemi ''relativistici' hanno γ >>1.

Quanto deve essere grande γ per ''vedere'' effetti relativistici?

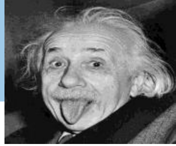
Quanto deve essere grande γ per ‘‘vedere’’ effetti relativistici?

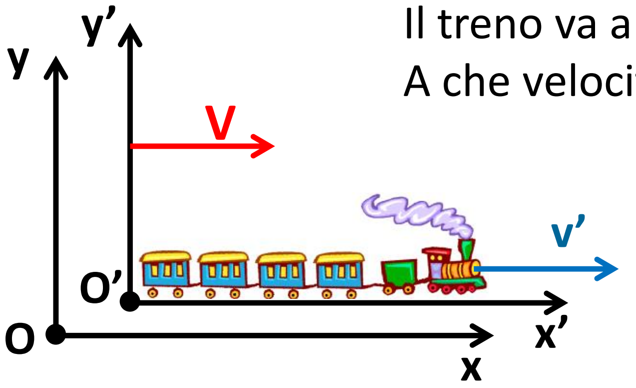


Oggetto	V(km/ora)	V(m/s)	beta= V/c	γ
Laboratorio	0	0	0	1
Concorde	2.400	667	2,2E-06	1,0000000000
Aereo X15	7.300	2.028	6,8E-06	1,0000000000
Satellite GPS@26500 km	13.600	3.778	1,3E-05	1,0000000001
Terra/Sole	108.000	30.000	1,0E-04	1,0000000050
Sole/galassia	828.000	230.000	7,7E-04	1,0000002939
	1.000.000	300.000	1,0E-03	1,0000005000
		3.000.000	1,0%	1,00005
		30.000.000	10%	1,00504
		90.000.000	30%	1,04828
		150.000.000	50%	1,2
	936.000.000	260.000.000	**86,7%**	**2,0**
			94,1%	3,0
			95,0%	3,2
			97,0%	4,1
			98,0%	5,0
			99,0%	7,1
			99,5%	**10,0**
			99,80%	15,8
			99,85%	18,3
			99,90%	22,4
Muoni atmosferici			**99,92%**	**25,0**
			99,97%	40,8
			99,99%	70,7
			99,995%	**100**
			99,999%	224
			99,9998%	500
			99,999900%	707
Protoni LHC - CERN		299 792 455	**99,999999%**	**7071**
Luce nel vuoto		**299 792 458**		∞

γ è il fattore di dilatazione o di contrazione dei tempi, delle masse, delle lunghezze, delle forze, dei campi elettrici, magnetici…

Il risultato matematico: Le trasformazioni delle velocità 1





Il treno va a velocità **v'** nel suo sistema di riferimento (O').
A che velocità **v** lo vedrò nel sistema O?

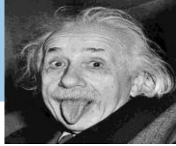
$$\begin{cases} x = \gamma\cdot\left(x'+Vt'\right) \quad ; \quad dx = \gamma dx'+\gamma V dt' \\ t = \gamma\cdot\left(t'+x'V/c^2\right) \quad ; \quad dt = \gamma dt'+\gamma \dfrac{V}{c^2}dx' \end{cases}$$

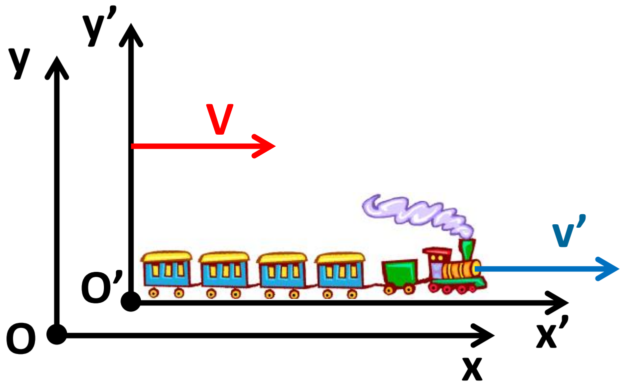
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

La formula per la somma delle velocità in Relatività Speciale:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx'+\gamma V dt'}{\gamma dt'+\gamma \dfrac{V}{c^2}dx'} = \frac{v'+V}{1+v'V/c^2}}$$

Le trasformazioni delle velocità 2





Come funziona la somma di velocità:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \quad ; \quad v' = c \rightarrow v = c \, ; \, V = c \rightarrow v = c$$

Supponiamo che **V**= 0,9 c

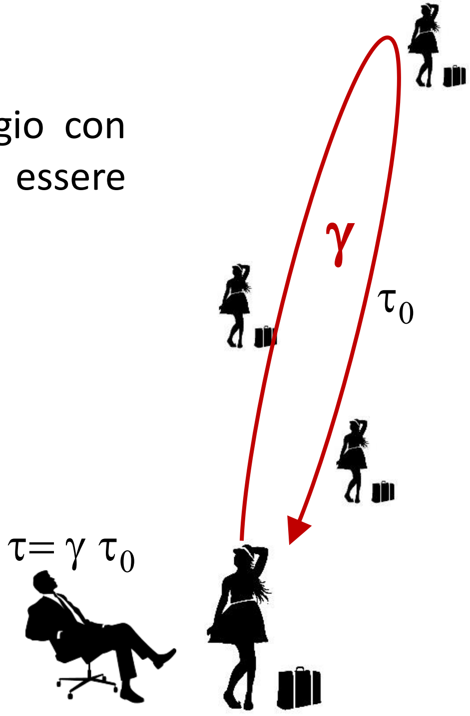
$$v = \frac{v' + 0{,}9\ c}{1 + 0{,}9\ v'/c}$$

v’	v
0	0,9 c
0,5 c	0,96 c
0,8 c	0,988 c
0,9 c	0,994 c
0,95 c	0,997 c
c	c

Il paradosso dei «gemelli» : non è un problema

Come viene posto: L'uomo e la donna sono due gemelli che hanno la stessa età. L'uomo sta sulla Terra. La donna parte per un viaggio con velocità $\gamma = 10$, e torna dopo t_0=1 anno, sul suo orologio. Per l'uomo il tempo passato è $t=\gamma t_0= 10$ anni.
Quindi l'uomo è 10 anni più vecchio, mentre le donna solo 1 anno più vecchia.
Ma, nel sistema di riferimento della donna, è l'uomo che ha fatto il viaggio con velocità γ, quindi la donna vede il tempo dell'uomo dilatato di $\gamma\tau$, ed è lei ad essere più vecchia di lui. Quindi chi sarà più vecchio alla fine del viaggio?

La soluzione: I due sistemi [l'uomo, la donna] **non sono equivalenti.**
Perché l'uomo sta fermo, è quindi un sistema inerziale, mentre la donna in almeno tre punti [partenza, inversione della velocità, arrivo] DEVE accelerare, quindi il suo non è un sistema inerziale e non posso scrivere banalmente le relazioni relativistiche.
Quello che succede in realtà è che alla fine è l'uomo ad essere più vecchio.
Ma non è semplice da vedere (calcolare).



Realtività Speciale: c è la velocità massima? 1

1. Non posso avere una velocità v>c «sommando» le velocità.

   …dalle trasformazioni di Lorentz per la somma di velocità.

2. Ma forse posso accelerare una particella a velocità maggiori di c…

L’esperimento:

- Faccio passare degli elettroni attraverso una differenza di potenziale ΔV, quindi gli elettroni acquisteranno un’energia cinetica $E_c = q\,\Delta V$.
- Poi misuro la loro velocità v.
- Quindi li faccio assorbire da una massa, e dall’aumento di Temperatura della massa ricavo l’energia ceduta: $E_c = C\Delta T$

Relatività Speciale: c è la velocità massima? 2

L'esperimento

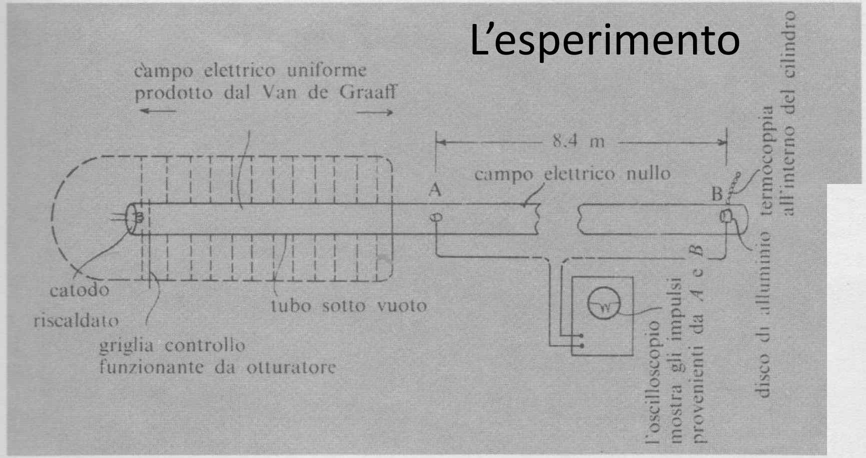


FIGURA 10.43 *Schema generale dell'esperimento sulla velocità limite. Gli elettroni sono accelerati nel campo uniforme di sinistra e il tempo di transito fra A e B è misurato con un oscilloscopio.*

Andamento classico: $T = \mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$

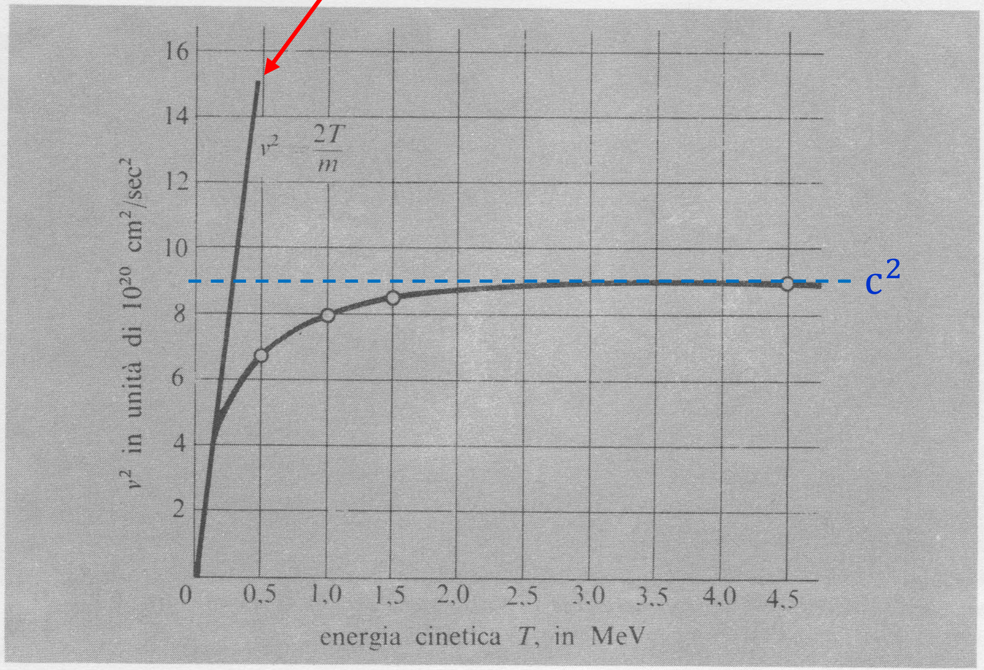


FIGURA 10.44

Risultati sperimentali: il grafico è della velocità^2 vs. l'E misurata.

- L'Energia aumenta…
- La velocità non supera c

→ m_e non può avere una velocità > c

Relatività Speciale: c è la velocità massima? 3

Il problema della conservazione della quantità di moto in un urto fra due particelle…

La quantità di moto si conserva solo se la ridefinisco così:

$$\bar{p} = \frac{M\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M\bar{v}$$

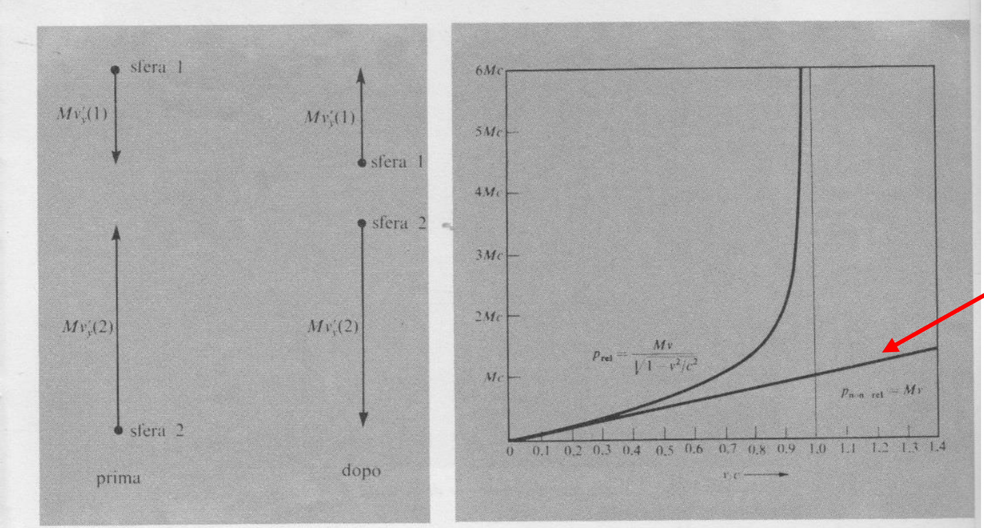


FIGURA 12.5 *Nel nuovo riferimento S′ la quantità di moto non relativistica nella direzione y′ non è la stessa prima e dopo l'urto: vi è un netto aumento della componente y della quantità di moto non relativistica.*

FIGURA 12.6 *Affinché la conservazione della quantità di moto sia valida in tutti i sistemi di riferimento, ridefiniamo* **p** *come segue: per una particella avente velocità* **v** *e massa a riposo M deve essere:*

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

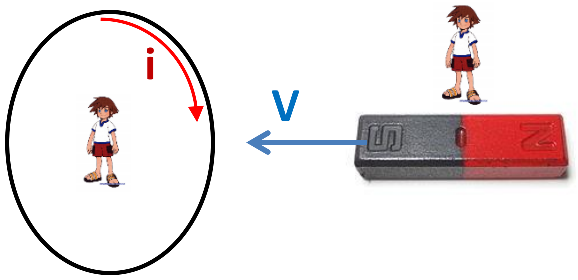
I valori della quantità di moto relativistica e di quella non relativistica sono riportati in grafico.

Andamento classico: p= mv

…devo ridefinire M? Sì

Che fine hanno fatto le asimmetrie magneti/spire?

L'osservatore può stare sulla spira oppure sul magnete:



1) Muovo il magnete rispetto alla spira: nella spira passa una corrente **i** perché la spira vede un campo B che varia nel tempo…

$$i = \frac{f}{R}; \quad f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

2) Muovo la spira rispetto al magnete: nella spira passa una corrente **i** perché le cariche elettriche nella spira si muovono con velocità v rispetto al campo B

$$i = \frac{f}{R} \quad ; \quad f = \oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = -\oint \bar{v} \times \bar{B} \cdot \bar{dl} =$$

Il problema era che l'osservatore vedeva un campo magnetico **in movimento**: ma anche i campi E, B, D, H….hanno le loro trasformazioni quando vengono visti da un sistema in moto rispetto a loro:

$\boldsymbol{E_{y,z} = \gamma\left[E'_{y,z} \pm V_x B'_{z,y}\right]}$ quindi il campo B viene visto come un campo elettrico (nel sistema a riposo).

$\boldsymbol{B_{y,z} = \gamma\left[B'_{y,z} \mp \frac{V_x}{c^2} E'_{z,y}\right]}$, Quindi nel primo caso non vedo B, ma E=vxB...devo usare la formula del

……………………………………………………………………………………………….secondo caso. E tutto torna. ☺

Relatività Speciale – perché non ho relazioni simmetriche nelle trasformazioni?

La somma delle velocità:

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad \text{dividiamo per } \gamma : \quad \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}}$$

Le trasformazioni di Lorentz [V/c=:β]

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') \quad \rightarrow \quad x = \gamma x' + \gamma V t' = \gamma\, x' + \gamma\, V \dfrac{c}{c} t' = \gamma\, x' + \gamma\, \beta\, c t' \\ t = \gamma \cdot \left(t' + x' V / c^2\right) \rightarrow \quad t = \gamma \cdot t' + \gamma\, x' V / c^2 \rightarrow \quad ct = \gamma \cdot ct' + \gamma\, x' \beta \qquad / \end{cases}$$

Chiamo ct=w

$$\begin{cases} x = \gamma\, x' + \gamma \beta\, w' \\ w = \gamma\, w' + \gamma \beta\, x' \end{cases}$$

Sono simmetriche!